

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală

Clasa a IX - a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Nu se acorda puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

1. Să se demonstreze că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ sunt adevărate inegalitățile:

a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$

a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0 \dots\dots 1p$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$, adev. $(a, b, c \in \mathbb{R}_+^*) \dots\dots\dots 2p$

b) Din a) rezultă că $a^3 + b^3 + abc \geq a^2b + ab^2 + abc \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq ab(a+b+c)$

Analog: $b^3 + c^3 + abc \geq bc(a+b+c)$ și $c^3 + a^3 + abc \geq ca(a+b+c) \dots\dots\dots 2p$

Avem $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)} =$
 $\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc} \dots\dots\dots 2p$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$\{x\} - \{2025x\} = x.$

Ecuația se scrie sub forma $\{2025x\} = \{x\} - x \Leftrightarrow \{2025x\} = -[x] \dots\dots\dots 1p$

Deoarece $\{2025x\} \in [0,1) \Rightarrow [x] \in (-1,0] \dots\dots\dots 2p$

Atunci, $[x]$ fiind întreg, avem $[x] = 0 \Rightarrow x \in [0,1) \dots\dots\dots 1p$

Astfel avem că $\{2025x\} = 0$, deci $2025x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k}{2025} \dots\dots\dots 2p$

Soluțiile ecuației sunt de forma $x = \frac{k}{2025}$, unde $k \in \{0,1 \dots\dots 2024\} \dots\dots\dots 1p$

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + \frac{3}{4}$, $(\forall) n \geq 1$ și $a_1 = \frac{2025}{2026}$

a) Determinați formula termenului general $a_n, n \geq 1$.

b) Demonstrați că $(a_1 - \frac{1}{2})(a_2 - \frac{1}{2}) \dots (a_n - \frac{1}{2}) \leq \left(\frac{506}{1013}\right)^n, (\forall) n \geq 1$

$$a) a_{n+1} = a_n^2 - 2 \cdot a_n \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{2} = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right)^{2^2} = \dots \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^{2^n} \dots\dots\dots 1p$$

$$= \left(\frac{2025}{2026} - \frac{1}{2}\right)^{2^n} = \left(\frac{1012}{2026}\right)^{2^n} = \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^n} \Rightarrow a_n = \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) \left(a_1 - \frac{1}{2}\right) \dots\dots \left(a_n - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^0+2^1+\dots+2^{n-1}} = \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^n-1} \dots\dots\dots 1p$$

Arătăm că $2^n - 1 \geq n, (\forall)n \geq 1$. Demonstrația prin inducție.....2p

4. Dacă $[AB]$ și $[CD]$ sunt două coarde perpendiculare ale cercului $C(O,R)$ și $AB \cap CD = \{P\}$, arătați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \dots\dots\dots 2p$$

Fie M mijlocul lui $[AB]$ și N mijlocul lui $[CD]$, atunci $OM \perp AB, ON \perp DC$ și

din ipoteza $AB \perp CD \Rightarrow ONPM$ dreptunghi2p

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \text{ și } \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Atunci: } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OP} =$$

$$4\overrightarrow{PO} - 2\overrightarrow{PO} = 2\overrightarrow{PO} \dots\dots\dots 2p$$